ETHZ, D-MAVT
Basisprüfung Lineare Algebra
Herbst 2007
Prof. K.Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. Geben Sie für a und b in $\mathbb{R}$ Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & ax_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & b \end{array}$$

a) keine Lösung

b) Lösungen mit einem freien Parameter

c) genau eine Lösung

besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

2. Ein Prozess gehorche dem folgenden Wachstumsgesetz

$$z(t) = -\beta_1 + \beta_2 \left(\sqrt{2}\right)^t .$$

Zur Bestimmung der reellen Parameter β_1 und β_2 liegen für $z(t)$ folgende Messwerte z_k, $k = 1, .., 4$, vor:

t_k	0	2	4	6
z_k	1	2	5	10

Man bestimme die Parameter β_1 und β_2 so, dass $\sum_{k=1}^{4} [\, z(t_k) - z_k]^2$ minimal wird.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

b) Berechnen Sie A^{99} sowie $(A^{-1})^{99}$.

Bitte wenden!

4. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit der Transformationsmethode.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = (0, 1, 0)^\top$.

c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y(0)$, für welche die zugehörige Lösung $y(t)$ gegen Null strebt für $t \to -\infty$.

5. Sei $x \in \mathbb{R}^3$ und sei $\mathcal{F}$ die folgende lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F} : x \longmapsto x' = Ax, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie die Abbildung $\mathcal{F}$ geometrisch.

b) Ist A eine Givens-Rotation?

c) Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements, um A in MATLAB zu definieren und die Determinante von A zu berechnen.

6. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

b) Die 3×4-Matrix B besitze die Singulärwertzerlegung $B = USV^\top$, mit

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie den Rang von B (**ohne** B zu berechnen).

(ii) Bestimmen Sie je eine Basis für den Kern und das Bild von B.

c) Geben Sie MATLAB-Statements an, welche die Matrix A von **a)** definieren und die Matrizen U, S, V der Singulärwertzerlegung von A liefern. Geben Sie die Dimensionen der Matrizen an, die von MATLAB als Output ausgegeben werden.

Viel Erfolg!